Das Sonnensystem

Peter Simons <simons@cryp.to>

2011-02-22

1 Keplers Gesetze

Wer die Geometrie des Sonnensystems verstehen will, gelangt zu Friedrich Johannes Kepler (1571–1630), der dieses Kunststück wohl als erster vollführt hat. Er fasste seine Einsichten in drei lässigen Gesetzen zusammen:

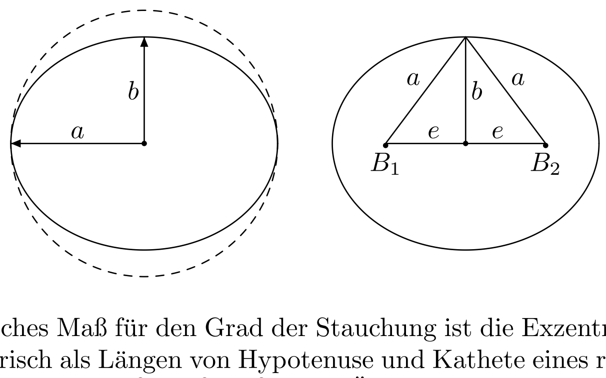
1. Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Ein von der Sonne zum Planeten gezogener „Fahrstrahl“ überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen (Kuben) der halben Hauptachse.

Da denkt man erstmal: *Das ist ja leicht!* Aber ganz so einfach ist das Weltall leider nicht. Keplers Gesetze beschreiben die Verhältnisse zwischen jeweils einem Planet und der Sonne, aber sie vernachlässigen alle Kräfte, die mehrere Planeten untereinander ausüben. Alle Berechnungen über das Sonnensystem, die auf diesen Regeln beruhen, enthalten also grundsätzlich Fehler. Für die Zwecke des Laien, der sich nur eine Vorstellung vom Sonnensystem verschaffen möchte, sind diese Abweichungen von der Realität aber unerheblich gering.

Eine Ellipse entsteht, wenn ein Kreis mit Radius $a > 0$ an einer Achse auf den Radius b mit $0 < \frac{b}{a} < 1$ gestaucht wird. Die längere Achse der Ellipse heißt Hauptachse, die gestauchte wird hingegen Nebenachse genannt.



Ein hilfreiches Maß für den Grad der Stauchung ist die Exzentrizität e, die a und b geometrisch als Längen von Hypotenuse und Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ins Verhältnis $e^2 = a^2 - b^2$ setzt. Über die Exzentrizität werden zwei Punkte der Hauptachse ausgezeichnet: die Brennpunkte B_1 und B_2, welche den Abstand e zum Mittelpunkt haben.

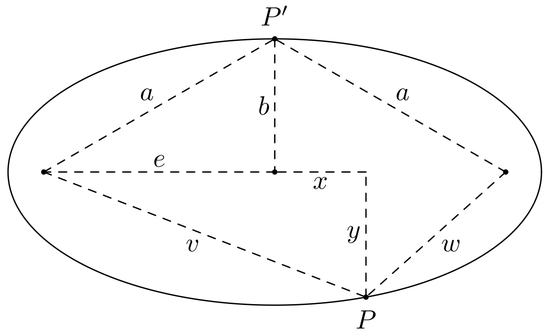


Abbildung 1: Für jeden Punkt der Ellipse ist $v + w = 2a$.

Formal wird eine Ellipse nun darüber definiert, dass für jeden ihrer Punkte $P = (x, y)$ die Summe der Brennpunktabstände $v = \overline{PB_1}$ und $w = \overline{PB_2}$ genau so groß sein soll, wie die Hauptachse der Ellipse lang ist. Aus Abbildung 1 wird klar, dass sich v und w über den Satz des Pythagoras als

$$\begin{aligned} v^2 &= y^2 + (e + x)^2 \,, \\ w^2 &= y^2 + (e - x)^2 \end{aligned}$$

darstellen lassen. In die Bedingung $v + w = 2a$ eingesetzt, folgt daraus:

$$\sqrt{y^2 + (e + x)^2} + \sqrt{y^2 + (e - x)^2} \;=\; 2a.$$

Zweimaliges Quadrieren und Einsetzen der Definition $e^2 = a^2 - b^2$ vereinfacht diese Gleichung zu einer impliziten Definition der Ellipse als Menge aller (x, y)-Paare, für die gilt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1.$$

Löst man diese Gleichung nach y auf, so folgte eine äquivalente Definition, die unsere Anschauung von Ellipsen als gestauchten Kreisen widerspiegelt:

$$y \;=\; \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Weiterhin lassen sich die Punkte einer Ellipse auch über ihren Winkel zur Hauptachse identifizieren. Für $0 \leq \phi < 2\pi$ sind dann

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos(\phi) \,, \\ y &= b \cdot \sin(\phi) \end{aligned}$$

die Koordinaten des entsprechenden Punktes der Ellipse, denn genau solche x und y erfüllen den trigonometrischen Pythagoras $(\sin(\phi))^2 + (\cos(\phi))^2 = 1$.

2 Die Planetenbahnen

Sei $a_{\min}$ die Distanz eines Planeten an seinem sonnennächsten Punkt (Perihel), und sei $a_{\max}$ die Distanz am sonnenfernsten Punkt (Aphel). Die Summe beider

Planet	Perihel	Aphel	a	b	e	$\frac{e}{a}$
Merkur	45.9	69.7	57.8	56.6	11.9	0.206
Venus	107.4	109.0	108.2	108.2	0.8	0.007
Erde	147.1	152.1	149.6	149.6	2.5	0.017
Mars	206.7	249.1	227.9	226.9	21.2	0.093
Jupiter	740.9	815.7	778.3	777.4	37.4	0.048
Saturn	1347.0	1507.0	1427.0	1424.8	80.0	0.056
Uranus	2735.0	3004.0	2869.5	2866.3	134.5	0.047
Neptun	4456.0	4537.0	4496.5	4496.3	40.5	0.009

Tabelle 1: Abmessungen der Planetenbahnen in Millionen Kilometer.

muss $2a$ ergeben, denn an diesen Extrempunkten befindet sich der Planet an den entgegengesetzten Enden der Hauptachse. Seine elliptische Umlaufbahn hat die Parameter:

$$\begin{aligned} a &= \frac{a_{\text{min}} + a_{\text{max}}}{2}, \\ b &= \sqrt{a^2 - e^2}, \\ e &= a - a_{\text{min}}. \end{aligned}$$

In Tabelle 1 sind die Abmessungen aller Planetenbahnen des Sonnensystems angegeben. Leider ist es nur sehr beschränkt möglich, solche Dimension maßstabsgetreu auf Papier abzubilden. Die Distanz Sonne–Mars ist bereits so groß, dass ein monströser Himmelskörper wie die Sonne selber im Verhältnis nur einen Punkt einnimmt. Dieser Umstand ist jedoch auch Anlass, um sich zu wundern, dass die Sonne überhaupt genug Anziehungskraft ausübt, um riesige Planeten über solche Entfernungen hinweg in Schach zu halten. Abbildung 2 veranschaulicht die Situation.

Tatsächlich sehen die Planetenbahnen allesamt wenig elliptisch aus, sondern beinahe wie Kreise. Das kommt daher, dass die Exzentrizität dieser Kurven — die Abweichung der Brennpunkte vom Mittelpunkt — im Vergleich zum Radius a verschwindend gering ist.

Dass die Planetenbahnen wenig exzentrisch sind, hat aber auch Vorteile, nämlich bei der Berechnung von deren Umfang. Es ist nämlich sehr schwierig, den Umfang einer beliebigen Ellipsen zu berechnen. Für Ellipsen mit geringer Exzentrizität existiert jedoch eine gute Näherung in Form von

$$U \approx \pi\,(b+a)\left(\frac{3\,(a-b)^2}{(b+a)^2\left(\sqrt{4-\frac{3\,(a-b)^2}{(b+a)^2}}+10\right)}+1\right).$$

Die konkreten Werte für die Längen der Umlaufbahnen im Sonnensystem sind in Tabelle 2 aufgeführt.

3 Dauer eines Sonnenjahres

Ein Sonnenjahr ist die Zeit, in der ein Planet die Sonne einmal umrundet. Keplers drittes Gesetz stellt für je zwei Planeten einen Zusammenhang zwischen der

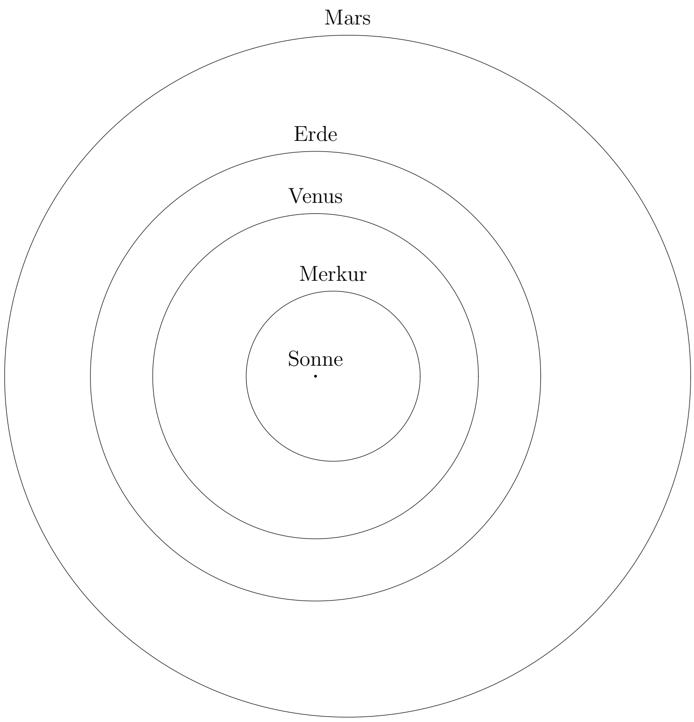


Abbildung 2: Die innersten 4 Planetenbahnen in maßstabsgetreuer Darstellung.

jeweiligen Länge ihres Sonnenjahrs und der Länge ihrer Bahnradien her:

$$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3.$$

Nimmt man die Erde zum Maßstab, dann ergibt sich die Länge des Sonnenjahrs anderer Planeten aus

$$t = \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{149,6^3}} \approx 0,00054651 \cdot \sqrt{a^3}.$$

Tabelle 2 zeigt die Ergebnisse dieser Rechnung für die Planeten des Sonnensystems.

Planet	a	b	t	U	$\frac{\text{km}}{\text{s}}$
Merkur	57.8	56.6	0.24	359.41	47.45
Venus	108.2	108.2	0.62	679.84	34.75
Erde	149.6	149.6	1.00	939.96	29.79
Mars	227.9	226.9	1.88	1428.80	24.08
Jupiter	778.3	777.4	11.87	4887.38	13.05
Saturn	1427.0	1424.8	29.46	8959.20	9.64
Uranus	2869.5	2866.3	84.01	18019.55	6.80
Neptun	4496.5	4496.3	164.78	28251.71	5.43

Tabelle 2: t bezeichnet die Dauer eines Sonnenjahres im Vergleich zur Erde. U ist der Umfang der elliptischen Bahn in Millionen Kilometer. Die letzte Spalte zeigt die Durchschnittsgeschwindigkeit $\frac{U}{t}$ umgerechnet in Kilometer pro Sekunde.