Spezielle Relativitätstheorie

Peter Simons <simons@cryp.to>

2011-11-04

Hypothese (Relativitätsprinzip). *Die Naturgesetze haben in jedem Bezugssystem dieselbe Form, unabhängig davon, ob es stillsteht oder ob es sich in gleichförmiger Bewegung befindet.*

Hypothese (Konstante Lichtgeschwindigkeit). *In jedem Bezugssystem beträgt die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum konstant* $c = 299\ 792\ 458\ \frac{m}{s}$.

Zur Veranschaulichung der Lage stelle man sich eine Lichtuhr vor. Eine Lichtuhr besteht aus einer L Meter langen Vakuumröhre, an deren Enden Spiegel angebracht sind. Ein kurzer Lichtblitz wird endlos zwischen beiden Spiegeln hin und her reflektiert. Immer, wenn der Lichtblitz einen der Spiegel erreicht, gibt es außerdem ein kurzes Geräusch, beispielsweise *Pong*. Dieses Geräusch entsteht periodisch alle $\frac{L}{c}$ Sekunden, ähnlich dem *Tick-Tack* einer normalen Uhr.

Der Beobachter S stellt eine solche Lichtuhr nun hochkannt in ein durchsichtiges Raumschiff, das mit Geschwindigkeit v gleichförmig von ihm wegfliegt. Weiterhin sei S' ein zweiter Beobachter, der im Raumschiff mitfliegt. Dann geht die Lichtuhr für S und S' verschieden schnell.

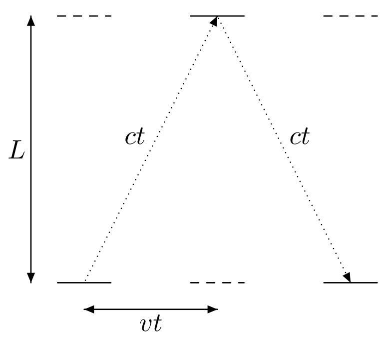

Abbildung 1: Eine Lichtuhr mit Geschwindigkeit v.

Im Bezugssystem von S' — im inneren des Raumschiffs — verhalten sich alle Dinge genau so, wie sie es täten, wenn das Raumschiff stillstünde. Die Lichtuhr läuft normal mit der Periode $\frac{L}{c}$.

Im Bezugssystem des stillstehenden Beobachters S sieht das anders aus. In der Zeit t, die das Licht braucht, um vom unteren zum oberen Spiegel zu fliegen, hat sich der obere Spiegel um vt vom Beobachter weg nach vorne bewegt. Um den Spiegel zu erreichen, muss das Licht nicht mehr die Strecke L zurücklegen, sondern die längere Strecke ct. Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant, also muss das Licht *länger* brauchen, um eine Periode zu durchlaufen. Die Stärke der Veränderung bestimmt der Satz des Pythagoras. Aus

$$(ct)^2 = (vt)^2 + L^2$$

folgt sofort

$$t = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Eine Uhr, die mit halber Lichtgeschwindigkeit fliegt, läuft für einen stillstehenden Beobachter demnach nur noch mit 86% der erwarteten Geschwindigkeit!

Folgerung (Zeitdilatation). *Für einen stillstehenden Beobachter geht jede relativ zu ihm bewegte Uhr aus seiner Sicht langsamer.*

Wenn eine Uhr plötzlich langsamer läuft, dann verändert dieser Umstand jede Messung von Geschwindigkeit, denn Geschwindigkeit ist ein Verhältnis von Raum über Zeit. Nun ist die Lichtgeschwindigkeit aber konstant — deren Messung erzielt immer dasselbe Ergebnis c. Dies ist nur möglich, wenn Bewegung auch den Raum verändert, und zwar umgekehrt proportional zur Zeit.

Folgerung (Lorentzkontraktion). *Je schneller sich Objekte relativ zu einem Beobachter bewegen, umso kürzer sind sie in der Bewegungsrichtung für ihn.*

Die Messungen von Raum und Zeit in beiden Bezugssystemen sind nicht ohne weiteres zu vergleichen. Beide Messungen sind jedoch nur verschiedene Darstellungen derselben Information, deswegen muss eine einfache Transformation existieren, die äquivalent zwischen S und S' umrechnet.

Im stillstehenden Bezugssystem S findet ein Ereignis $E = (x, y, z, t)$ an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit statt. Im bewegten Bezugssystem S' würde dasselbe Ereignis aber als $E' = (x', y', z', t')$ beobachtet. Zur Vereinfachung sei angenommen, S' würde sich exakt an der der x-Achse von S entlang bewegen. Dann fände keinerlei Bewegung in y- oder z-Richtung statt, woraus bequemerweise $y = y'$ und $z = z'$ folgt.

Einen Ansatzpunkt zur Beschreibung von x und t liefert die Betrachtung der Spezialfälle, dass ein Ereignis jeweils in S und S' auf dem räumlichen Nullpunkt liegt:

$$\begin{aligned} x = 0 &\quad\Longrightarrow\quad x' = -vt' \\ x' = 0 &\quad\Longrightarrow\quad x = vt \end{aligned}$$

Uns ist bereits bekannt, dass die Veränderung von Raum und Zeit proportional durch eine von der Geschwindigkeit abhängige Konstante beschrieben wird, nämlich den Faktor

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Damit lassen sich die folgenden Gleichungen aufstellen:

$$\alpha x = x' + vt' \quad \wedge \quad \alpha x' = x - vt.$$

Die Transformation von x' folgt daraus unmittelbar:

$$x' = \alpha x - vt' \quad \wedge \quad x' = \frac{x - vt}{\alpha}.$$

Werden außerdem beide Darstellungen von x' gleichgesetzt

$$\alpha x - vt' = \frac{x - vt}{\alpha},$$

so folgt die Transformation der Zeit:

$$t' = \frac{vt + \left(\alpha^2 - 1\right) x}{v\,\alpha}.$$

Weitere Vereinfachungen ergeben sich, nachdem α einsetzt wurde.

Folgerung (Lorentztransformation)**.** *Tritt in einem ruhenden Bezugssystem S das Ereignis $E = (x, y, z, t)$ auf, so tritt in einem Bezugssystem S', das sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu S entlang der x-Achse bewegt, das Ereignis $E' = (x', y', z', t')$ auf, mit*

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bilden von S nach S' ab. Den umgekehrten Fall erhält man, wenn man dem Relativitätsprinzip folgend annimmt, S' stünde still und S bewege sich mit $-v$.

Folgerung (Addition von Geschwindigkeiten)**.** *Wenn ein Objekt in S' mit der Geschwindigkeit u' wahrgenommen wird, dann hat es in S die Geschwindigkeit*

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$

Beweis. Gegeben ist $u' = \frac{x'}{t'}$ in S', und gesucht wird $u = \frac{x}{t}$ in S.

$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &= \frac{\frac{x' + vt'}{\alpha}}{\frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\alpha}} \\ &= \frac{x' + vt'}{t' + \frac{x'v}{c^2}} \\ &= \frac{\frac{x'}{t'} + \frac{vt'}{t'}}{\frac{t'}{t'} + \frac{x'v}{t'c^2}} \\ &= \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \end{aligned}$$

□

Die Additionsformel besagt, dass es unmöglich ist, ein Objekt auf Überlichtgeschwindigkeit zu beschleunigen. Wenn sich ein Objekt mit $v = c$ bewegt, und relativ zu ihm bewegt sich ein anderes Objekt mit $u' = c$, dann ergibt dies für einen ruhenden Beobachter insgesamt $\frac{c+c}{1+\frac{cc}{c^2}} = c$.

Dieses überraschende Ergebnis wirft einige Fragen auf. Angenommen, wir hätten zwei Raketen, die nahezu auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigen könnten. Wir montieren die beiden Raketen aufeinander, und stellen alles so ein, dass die zweite Rakete abgeschossen wird, sobald die erste ausgebrannt ist. Dann fliegt aus unserer Perspektive die zweite Rakete effektiv kaum schneller als die Erste. Diese Tatsache scheint jedoch das Prinzip der Energieerhaltung zu verletzen: die zweite Rakete hat enorme Kräfte zur Beschleunigung aufgewendet — diese Energie muss sich doch als kinetische Energie $T = \frac{1}{2}mv^2$ manifestieren?

Wenn $\Delta T > 0$ ist, dieser Energiezuwachs aber durch Δv nicht gedeckt wird, dann muss offensichtlich die Masse um Δm zunehmen. Die Masse eines Objekts hängt also von der Geschwindigkeit ab, mit der es sich bewegt. Masse ist definiert als die Fähigkeit, Beschleunigung zu widerstehen, deswegen muss bei hoher Geschwindigkeit immer mehr Beschleunigung aufgewendet werden, um denselben Geschwindigkeitszuwachs zu erzielen.

Hypothese (Masse-Energie-Äquivalenz)**.** *Ein Körper der Masse m besitzt die Energie $E = mc^2$.*

Darüber lässt sich nun die exakte Masse eines bewegten Körpers errechnen. Die zur Beschleunigung aufgewendete Energie bleibt als kinetische Energie erhalten:

$$\Delta E = \Delta T$$

Wird diese Veränderung über Zeit betrachtet, so folgt eine Gleichung der Ableitungen

$$\begin{aligned}
& & \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \\
\Longrightarrow & & \frac{\mathrm{d}\left(mc^2\right)}{\mathrm{d}t} &= F\,v \\
& & &= \frac{\mathrm{d}\,(mv)}{\mathrm{d}t}\,v \\
\Longrightarrow & & 2m\,\frac{\mathrm{d}\left(mc^2\right)}{\mathrm{d}t} &= 2m\,\frac{\mathrm{d}\,(mv)}{\mathrm{d}t}\,v \\
\Longrightarrow & & \frac{\mathrm{d}\left(m^2c^2\right)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\left(m^2v^2\right)}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

Die Ableitung zweier Funktionen sind gleich, wenn sich diese nur um eine Konstante C unterscheiden:

$$m^2c^2 = m^2v^2 + C.$$

Sei $v = 0$, und sei m_0 die Masse von m in Ruhe. Dann folgt über

$$\begin{aligned}
& & m_0^2c^2 &= C \\
\Longrightarrow & & m^2c^2 &= m^2v^2 + m_0^2c^2 \\
\Longrightarrow & & m^2 &= \frac{m_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
\Longrightarrow & & m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

eine allgemeine Darstellung der Masse eines bewegten Objekts.

Folgerung. *Kraft ist die zeitliche Änderung eines Impulses*

$$F = \frac{d\,(mv)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\,v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Genausogut hätte man auch anders herum argumentieren können. Sei

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

die Masse eines bewegten Objekts. Wenn v klein ist im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit, dann entspricht m der Taylorreihe

$$m = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots\right).$$

Aufgrund von $v \ll c$ sind alle Reihenglieder nach dem zweiten so klein, dass sie praktisch keine Auswirkungen mehr haben:

$$\begin{aligned}
& & m &\cong m_0 + \frac{1}{2}m_0\frac{v^2}{c^2} \\
\Longrightarrow & & mc^2 &\cong m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2.
\end{aligned}$$

Die Energie eines Objektes setzt sich also aus zwei Teilen zusammen: der Ruheenergie m_0c^2 sowie der kinetischen Energie $\frac{1}{2}m_0v^2$, die dem Objekt durch Beschleunigung zugeführt wurde.

Die Masse eines Objektes wächst über Geschwindigkeit. Nahe der Lichtgeschwindigkeit erreicht die Masse praktisch unendlich, eine Beschleunigung auf Lichtgeschwindigkeit erfordert deswegen unendlich viel Kraft. Es folgt, dass die Lichtgeschwindigkeit nur von Partikeln erreicht werden kann, deren Masse Null ist, wie beispielsweise bei Photonen.