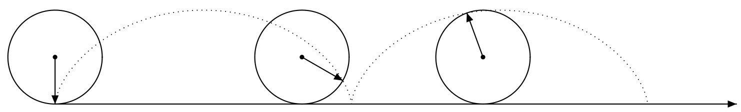
Was macht ein Spirograph?

Peter Simons `<simons@cryp.to>`

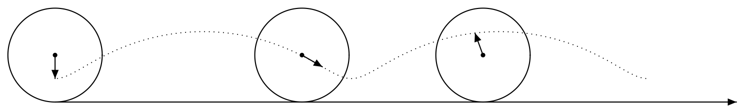
2010-11-17

1 Zykloiden

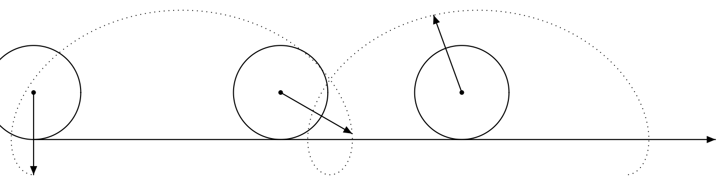
Angenommen, ein Kreis rollt gleichmäßig auf einer Geraden entlang. Wird nun ein beliebiger Punkt des Kreises markiert, so beschreibt dieser im Verlaufe der Roll-Bewegung eine Kurve, die Zykloide ("Radlinie") genannt wird:



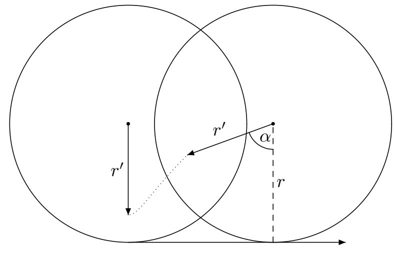
Rückt der ausgewählte Punkt näher an den Kreismittelpunkt heran, so wird diese Kurve flacher:



Genauso ist es möglich, einen Punkt zu wählen, der außerhalb des Kreises liegt. Ein Spirograph kann eine solche Zykloide zwar nicht erzeugen, aber die Pedale eines Fahrrades durchlaufen beispielsweise eine solche Kurve:

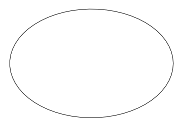
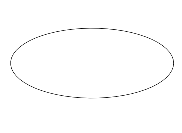
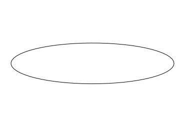
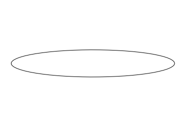
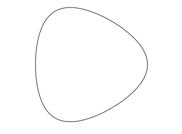
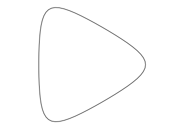
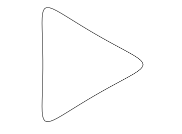
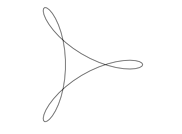
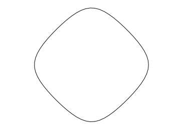
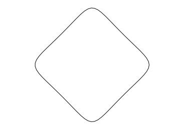
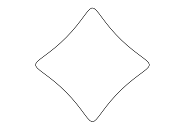
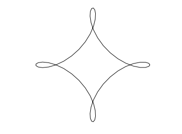
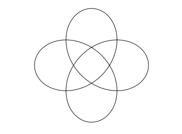
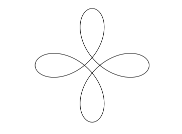
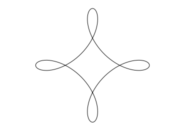
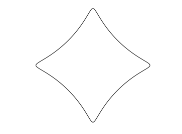
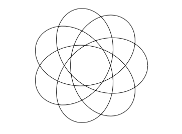
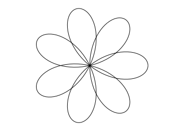
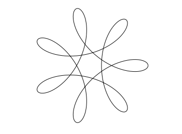
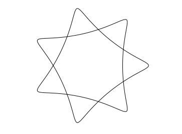
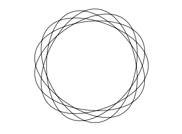
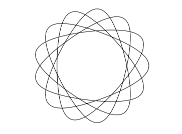
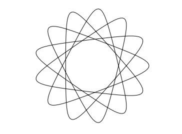
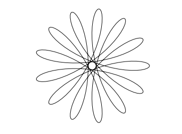
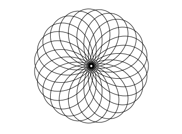
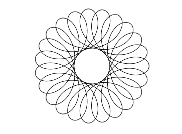
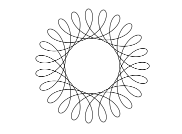
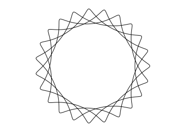
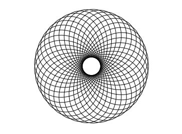
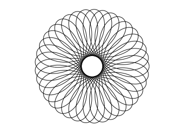
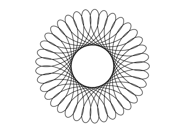
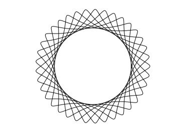


Mathematisch lassen sich Zykloide mit einfacher Geometrie beschreiben. Sei r der Radius des rollenden Kreises, und sei r' der Abstand des ausgewählten Punktes vom Kreismittelpunkt. Wenn der Kreis auf der x-Achse die Distanz αr zurückgelegt hat, dann bezeichnet α den Wälzwinkel der erfolgten Bewegung. Der Mittelpunkt des "neuen" Kreises liegt bei $(\alpha r, r)$. Um von dort auf den dazugehörigen Punkt der Hypozykloiden zu kommen, ist eine Verschiebung um $-r' \sin(\alpha)$ auf der x-Achse und um $-r' \cos(\alpha)$ auf der y-Achse notwendig. Eine Zykloide ist also eine Abbildung, die jedem Wälzwinkel α das (x, y)-Koordinaten-Paar $(\alpha r - r' \sin(\alpha),\ r - r' \cos(\alpha))$ zuordnet.



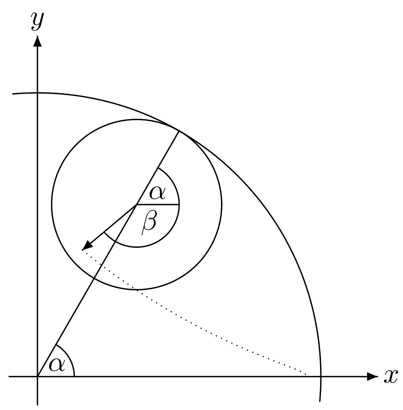
2 Hypozykloiden

Rollt ein Kreis mit Radius r nicht auf einer Geraden entlang, sondern auf der Innenseite eines größeren, ihn umgebenen Kreises mit Radius R, dann erzeugt ein beliebig gewählter Punkt mit Abstand r' zum Mittelpunkt des inneren Kreises eine Kurve, die Hypozykloide genannt wird. Maßgeblich für die Struktur der Kurve ist das Verhältnis der Radien R und r.

$\frac{r}{R}$	$r' = \frac{1}{5}r$	$r' = \frac{2}{5}r$	$r' = \frac{3}{5}r$	$r' = \frac{7}{5}r$
$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{3}$				
$\frac{1}{4}$				
$\frac{3}{4}$				
$\frac{5}{7}$				
$\frac{5}{13}$				
$\frac{19}{23}$				
$\frac{29}{37}$				

Für die in der vierten Spalte gezeigten Kurven gilt $r' > r$; der gewählte Punkt liegt also außerhalb des inneren Kreises. Diese Konfiguration ist mathematisch gesehen kein Problem, mit handelsüblichen Spirographen jedoch nicht möglich.

Zwar scheinen Hypozykloiden deutlich komplexer zu sein als Zykloiden, die zugrunde liegende Geometrie unterscheidet sich aber kaum. Die Strecke vom Ursprung zum Mittelpunkt des inneren Kreises hat die Länge $R - r$. Also liegt der Mittelpunkt des inneren Kreises bei $((R-r)\cos(\alpha), (R-r)\sin(\alpha))$. Um von dort auf den Punkt der Hypozykloiden zu kommen, ist eine Verschiebung um $r'\cos(\beta)$ auf der x-Achse und um $r'\sin(\beta)$ auf der y-Achse notwendig. Aus der bekannten Gleichung $\alpha R = (\alpha - \beta)\, r$ folgt der gesuchte Wert $\beta = \alpha\frac{r-R}{r}$. Eine Hypozykloide bildet also jeden beliebigen Wälzwinkel α auf das folgende (x, y)-Koordinaten-Paar ab:

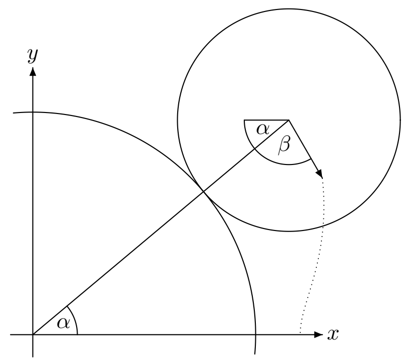


$$x =(R-r)\cos(\alpha) + r'\cos\left(\alpha\frac{r-R}{r}\right)$$
$$y =(R-r)\sin(\alpha) + r'\sin\left(\alpha\frac{r-R}{r}\right)$$

Die Kurve schließt sich, sobald eine volle Umdrehung des inneren Kreises mit einer vollen Umrundung des äußeren zusammenfällt, denn beide Kreise befinden sich dann wieder im Ursprungszustand. Für natürliche Radien R und r ist dies nach $\dfrac{r}{\gcd(R,r)}$ Umrundungen des äußeren Kreises der Fall.

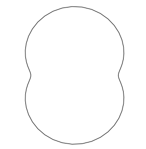
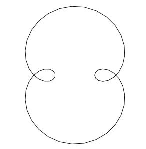
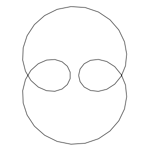
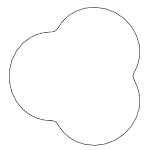
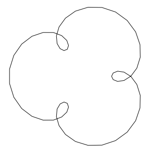
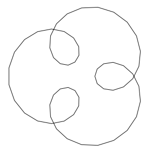
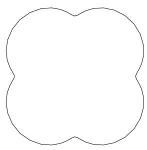
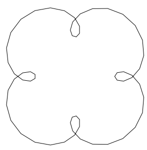
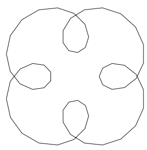
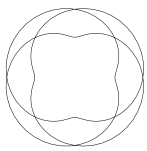
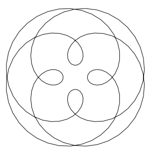
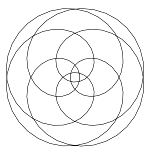
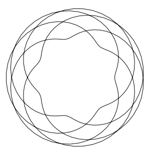
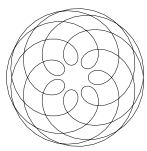
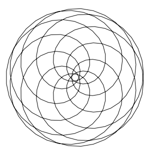
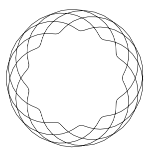
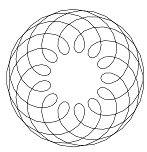
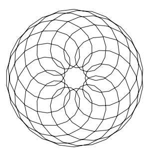
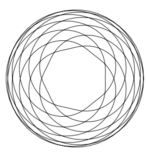
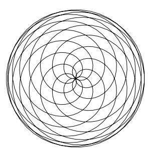
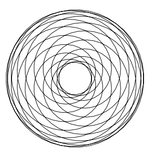
3 Epizykloide

Rollt ein Kreis mit Radius r auf der Außenseite eines Kreises mit Radius R entlang, dann erzeugt ein fest gewählter Punkt mit Abstand r' zum Kreismittelpunkt des äußeren Kreises eine Kurve, die Epizykloide genannt wird. Für einen gegebenen Wälzwinkel α liegt der Mittelpunkt des äußeren Kreises bei $((R+r)\cos(\alpha), (R+r)\sin(\alpha))$. Um von dort zum Punkt der entsprechenden Epizykloiden zu kommen, ist eine Verschiebung um $-r'\cos(\alpha+\beta)$ auf der x-Achse und um $-r'\sin(\alpha+\beta)$ auf der y-Achse notwendig. Aus der bekannten Gleichung $\alpha R = \beta r$ folgt $\beta = \alpha\frac{R}{r}$, und $\alpha + \beta$ ist somit gleich $\alpha\frac{R+r}{r}$. Eine Epizykloide bildet also einen beliebigen Wälzwinkel α auf das folgende (x, y)-Koordinaten-Paar ab:



$$x =(R+r)\cos(\alpha) - r'\cos\left(\alpha\frac{R+r}{r}\right)$$
$$y =(R+r)\sin(\alpha) - r'\sin\left(\alpha\frac{R+r}{r}\right)$$

Wenn man sich diese Gleichungen etwas genauer ansieht – und vor allem mit denen der Hypozykloiden vergleicht —, dann erkennt man, dass die Epizykloide (R, r, r') mit der Hypozykloiden $(R, -r, -r')$ identisch ist.

$\frac{r}{R}$	$r' = \frac{2}{3}r$	$r' = \frac{5}{3}r$	$r' = \frac{8}{3}r$
$-\frac{1}{2}$			
$-\frac{1}{3}$			
$-\frac{1}{4}$			
$-\frac{3}{4}$			
$-\frac{5}{7}$			
$-\frac{5}{13}$			
$-\frac{11}{7}$			
$-\frac{29}{17}$