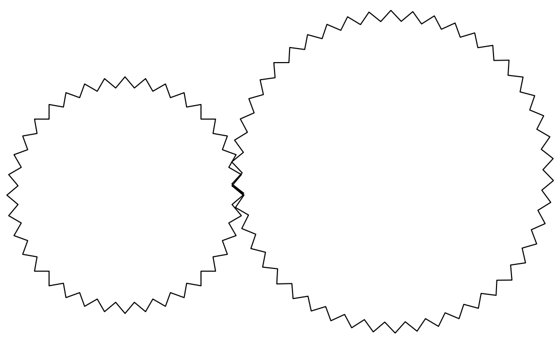
Wie baut man Zahnräder?

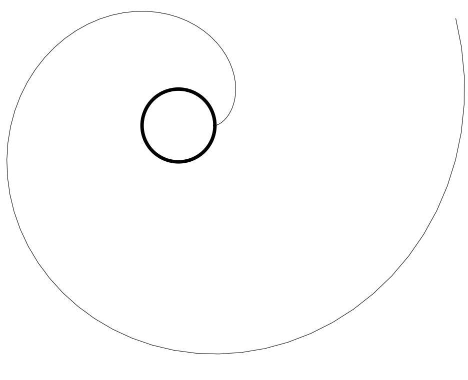
Peter Simons <simons@cryp.to>

2010-12-30

Im Leben eines an Technik interessierten Menschen kommt irgendwann der Tag, an dem man sich plötzlich fragt: "Wie werden eigentlich Zahnräder gebastelt?" Auf den ersten Blick erscheint das alles ganz leicht. Man sägt aus Sperrholz zwei Kreise aus. Dann versieht man diese in regelmäßigen Abständen mit Zacken, und feilt schließlich noch so lange daran herum, bis die Zacken des einen Rades in die Senken des jeweils anderen passen — fertig! Das Ergebnis wird dann ungefähr so aussehen wie diese:



Nun sind diese Zahnräder zweifelsohne schön, sie haben aber einen kleinen Makel: sie drehen sich nicht besonders gut. Vielmehr neigen sie dazu, sich zu verkanten und zu blockieren. Spätestens dann dämmert einem: so einfach ist die ganze Sache wohl doch nicht. Tatsächlich haben die Zähne eines Zahnrades in der Regel nicht die Form von Zacken, sondern die Form einer Kreis-Evolvente. Wie eine solche Kurve entsteht, kann man sich anschaulich so vorstellen, dass ein Kreis mit einem dünnen Bindfaden umwickelt ist. Fasst man diesen Faden am Ende und wickelt ihn so vom Kreis ab, dass er dabei immer straff gespannt ist, dann beschreibt das Ende des Fadens eine Spirale:



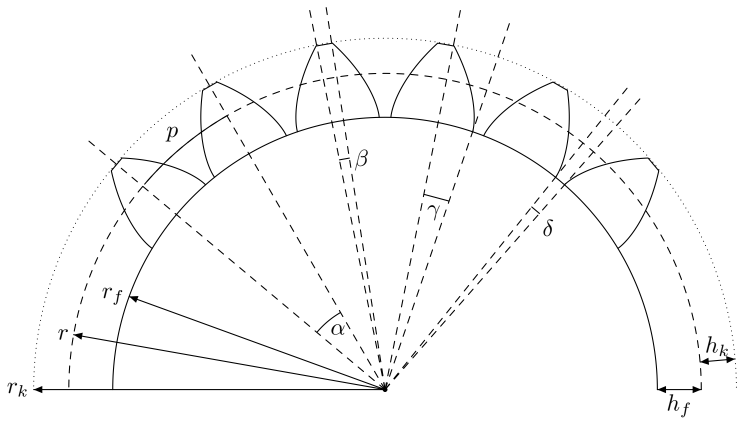
Mathematisch gesehen ist eine Kreis-Evolvente eine Abbildung, die jedem Winkel $\varphi \geq 0$ das folgende (x, y)-Koordinatenpaar zuordnet:

$$x = \cos(\varphi) + \varphi \sin(\varphi)$$
$$y = \sin(\varphi) - \varphi \cos(\varphi)$$

Der Winkel φ entspricht dabei der Länge des Fadens (Kreisumfangs), der zu diesem Zeitpunkt abgewickelt worden ist.

Zahnräder, deren Zahnseiten der Form einer Kreis-Evolvente entsprechen, haben die positive Eigenschaft, dass sich während der Drehung immer mindestens ein Zahnpaar im Eingriff befindet, was eine gleichmäßige Kraftübertragung gewährleistet. Außerdem lassen sich solche Zahnräder gleich gut in beide Richtungen drehen. Zuguterletzt ist die Evolventenverzahnung im Vergleich zu anderen Zahnformen relativ unempfindlich gegen Ungenauigkeiten bei der Herstellung.

Maßgeblich für die Form eine Zahnrades sind nun zwei Größen: der Modul $m > 0$ und die Anzahl der Zähne $z \geq 3$. Alle anderen Maße folgen direkt aus diesen beiden Werten, wobei zwei Zahnräder immer dann zueinander passen, wenn sie denselben Modul haben. Die Anzahl der Zähne kann dagegen beliebig gewählt werden.



Formal definiert ist der Modul als $m = \frac{2r}{z} = \frac{p}{\pi}$, wobei r der Radius des Arbeitskreises und p die sogenannte Teilung ist, welche den absoluten Abstand zwischen zwei Zähnen auf dem Arbeitskreis angibt. Durch Äquivalenzumformung erhält man $p = m\pi$ und $r = \frac{mz}{2}$. Für vorgegebene m und z sind die Werte von r und p also bekannt. Weiterhin benötigt werden die Höhe von Zahnfuß und Zahnkopf, welche üblicherweise als $h_f = 1,25m$ und $h_k = m$ definiert sind. Der Zahnfuß ist somit 25% höher als der Kopf. Aus $r_f = r - h_f$ und $r_k = r + h_k$ folgen trivial die Radien von Fußkreis und Kopfkreis.

Eine Zahneseite soll nun der Evolvente des Fußkreises entsprechen. Um diese zu berechnen, benötigt man den maximalen Winkel φ, so dass die Evolvente die gewünsche Höhe r_k erreicht. Das heißt, dass die folgende Gleichung gelten muss:

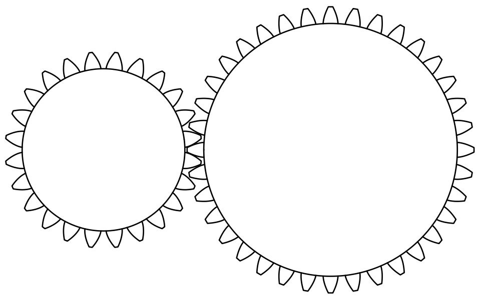
$$\sqrt{(\varphi \sin\varphi + \cos\varphi)^2 \; {r_f}^2 + (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi)^2 \; {r_f}^2} = r_k$$

Nachdem die Quadrate ausmultipliziert sind, läßt sich der Ausdruck mit der bekannten Identität $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ auf die folgende Darstellung vereinfachen:

$$\varphi = \frac{\sqrt{{r_k}^2 - {r_f}^2}}{r_f} = \frac{3\sqrt{4z-1}}{2z-5}$$

Sei (x, y) der Punkt der Kreisevolventen, der dem Öffnungswinkel φ zugeordnet ist. Dann lautet der von einer Zahnseite aufgespannte Winkel am Zahnrad $\gamma = \arctan\frac{y}{x}$. Der Winkel zwischen zwei Zähnen beträgt $\alpha = \frac{p}{r}$. Das heißt, dass zwischen zwei Zähnen ein Winkel von $\alpha - 2\gamma$ frei bleibt, den es auf die Größen β und δ aufzuteilen gilt. Es erscheint zweckmäßig, β ein wenig kleiner anzulegen als δ, daher wählen wir (etwas willkürlich) $\beta = \frac{\alpha-2\gamma}{3}$. Der Wert von δ ist damit ebenfalls bestimmt.

Es sind also alle Abmessungen eines Zahnrades mit Evolventenverzahnung bekannt. Das folgende Diagramm zeigt zwei Zahnräder mit einem Modul von 1 Millimeter. Das kleinere Zahnrad hat 24 Zähne, das größere hingegen 36:



Diese Abbildung zeigt zwei Zahnräder mit 72 und 29 Zähnen. Der Modul lautet erneut 1 Millimeter: